

Binomická věta

BINOMICKÁ VĚTA (platí pro n -tou mocninu dvojčlenu, binom = dvojčlen)

Pro každé a, b a každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \underbrace{\binom{n}{k} a^{n-k} b^k}_{\text{STRUČNÝ ZÁPIS}} = \underbrace{\binom{n}{0} a^n b^0}_{1. \text{ člen}} + \underbrace{\binom{n}{1} a^{n-1} b^1}_{2. \text{ člen}} + \underbrace{\binom{n}{2} a^{n-2} b^2}_{3. \text{ člen}} + \dots$$

$$\dots + \underbrace{\binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^{k-1}}_{k\text{-tý člen}} + \underbrace{\binom{n}{k} a^{n-k} b^k}_{(k+1) \text{ člen}} + \dots + \underbrace{\binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1}}_{n\text{-tý člen}} + \underbrace{\binom{n}{n} a^0 b^n}_{(n+1) \text{ člen}}$$

- BINOMICKÝ ROZVOJ má $(n+1)$ členů
- SOUČET EXPONENTŮ u každého členu je n , u základu a exponent klesá, u základu b roste
- BINOMICKÉ KOEFICIENTY jsou kombinační čísla z n -tého řádku Pascalova trojúhelníku
- POŘADÍ ČLENŮ je o 1 větší než dolní číslo v kombinačním čísle u příslušného členu, tj.

$$k\text{-tý člen } A_k = \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^{k-1} \quad \left[(k+1) \text{ člen: } A_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right]$$

$$\left[\sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n \quad \text{čteme: suma pro } k = 0 \text{ až } n \quad \left(\sum \text{ řecké velké písmeno sigma} \right) \right]$$

do výrazu za symbolem dosazujeme za k postupně všechna celá čísla od 0 do n a postupně takto

vzniklé výrazy sčítáme, např. $\sum_{k=1}^{100} k = 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$

Příklady

① Odvoďte z binomické věty

$$a) (a+b)^3 = \binom{3}{0} a^3 b^0 + \binom{3}{1} a^2 b^1 + \binom{3}{2} a^1 b^2 + \binom{3}{3} a^0 b^3$$

$$= a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 \quad [n=3 \Rightarrow n+1=4 \text{ (členy)}]$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \end{array}$$

$$b) (a-b)^4 = \binom{4}{0} a^4 (-b)^0 + \binom{4}{1} a^3 (-b)^1 + \binom{4}{2} a^2 (-b)^2 + \binom{4}{3} a^1 (-b)^3 + \binom{4}{4} a^0 (-b)^4 =$$

$$= 1 \cdot a^4 \cdot 1 + 4 \cdot a^3 \cdot (-b) + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot a \cdot (-b^3) + 1 \cdot 1 \cdot b^4 =$$

$$= a^4 - 4a^3 b + 6a^2 b^2 - 4ab^3 + b^4 \quad [n=4 \Rightarrow n+1=5 \text{ členů binomického rozvoje}]$$

pokud zn. $\ominus$ u $b \Rightarrow$ po úpravě u lichých mocnin b před členem $\ominus$

$$c) (a-b)^3 = \binom{3}{0} a^3 (-b)^0 + \binom{3}{1} a^2 (-b)^1 + \binom{3}{2} a^1 (-b)^2 + \binom{3}{3} a^0 (-b)^3 =$$

$$= 1 \cdot a^3 \cdot 1 - 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 - 1 \cdot 1 \cdot b^3 = a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3$$

$$\text{PAMATUJ! } (a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3$$

② Užitím binomické věty vypočtěte

$$\begin{aligned}
 \text{a) } 1,01^6 &= (1 + 0,01)^6 = (1 + 10^{-2})^6 = \binom{6}{0} 1^6 (10^{-2})^0 + \binom{6}{1} 1^5 (10^{-2})^1 + \binom{6}{2} 1^4 (10^{-2})^2 + \\
 &\quad + \binom{6}{3} 1^3 (10^{-2})^3 + \binom{6}{4} 1^2 (10^{-2})^4 + \binom{6}{5} 1^1 (10^{-2})^5 + \binom{6}{6} 1^0 (10^{-2})^6 = \\
 &= 1 \cdot 1 \cdot 1 + 6 \cdot 1 \cdot 10^{-2} + 15 \cdot 10^{-4} + 20 \cdot 10^{-6} + 15 \cdot 10^{-8} + 6 \cdot 10^{-10} + 1 \cdot 10^{-12} = \\
 &= 1 + 0,06 + 0,0015 + 0,000\,020 + 0,000\,000\,15 + 0,000\,000\,000\,6 + 0,000\,000\,000\,001 = \\
 &= 1,061\,520\,150\,601
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \left(3x^2 - \frac{y}{2}\right)^4 &= \binom{4}{0} (3x^2)^4 \left(-\frac{y}{2}\right)^0 + \binom{4}{1} (3x^2)^3 \left(-\frac{y}{2}\right)^1 + \binom{4}{2} (3x^2)^2 \left(-\frac{y}{2}\right)^2 + \\
 &\quad + \binom{4}{3} (3x^2)^1 \left(-\frac{y}{2}\right)^3 + \binom{4}{4} (3x^2)^0 \left(-\frac{y}{2}\right)^4 = 1 \cdot 81x^8 \cdot 1 - 4 \cdot 27x^6 \cdot \frac{y}{2} + \\
 &\quad + 6 \cdot 9x^4 \cdot \frac{y^2}{4} - 4 \cdot 3x^2 \cdot \frac{y^3}{8} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{y^4}{16} = 81x^8 - 54x^6y + \frac{27}{2}x^4y^2 - \frac{3}{2}x^2y^3 + \frac{1}{16}y^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } (\sqrt{3} - \sqrt{2})^4 &= \binom{4}{0} (\sqrt{3})^4 (-\sqrt{2})^0 + \binom{4}{1} (\sqrt{3})^3 (-\sqrt{2})^1 + \binom{4}{2} (\sqrt{3})^2 (-\sqrt{2})^2 + \\
 &\quad + \binom{4}{3} (\sqrt{3})^1 (-\sqrt{2})^3 + \binom{4}{4} (\sqrt{3})^0 (-\sqrt{2})^4 = 1 \cdot 9 \cdot 1 - 4 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + 6 \cdot 3 \cdot 4 - \\
 &\quad - 4 \cdot \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2} + 1 \cdot 1 \cdot 4 = 9 - 12\sqrt{6} + 72 - 8\sqrt{6} + 4 = 85 - 20\sqrt{6}
 \end{aligned}$$

③ Vypočítejte pomocí binomické věty

$$\begin{aligned}
 \text{a) } (x^2 - 1)^5 &= \binom{5}{0} (x^2)^5 (-1)^0 + \binom{5}{1} (x^2)^4 (-1)^1 + \binom{5}{2} (x^2)^3 (-1)^2 + \binom{5}{3} (x^2)^2 (-1)^3 + \\
 &\quad + \binom{5}{4} (x^2)^1 (-1)^4 + \binom{5}{5} (x^2)^0 (-1)^5 = 1 \cdot x^{10} \cdot 1 - 5 \cdot x^8 \cdot 1 + 10 \cdot x^6 \cdot 1 - 10 \cdot x^4 \cdot 1 + \\
 &\quad + 5 \cdot x^2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = x^{10} - 5x^8 + 10x^6 - 10x^4 + 5x^2 - 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } (\sqrt{3} - 2)^4 &= \binom{4}{0} (\sqrt{3})^4 (-2)^0 + \binom{4}{1} (\sqrt{3})^3 (-2)^1 + \binom{4}{2} (\sqrt{3})^2 (-2)^2 + \binom{4}{3} (\sqrt{3})^1 (-2)^3 + \\
 &\quad + \binom{4}{4} (\sqrt{3})^0 (-2)^4 = 1 \cdot 9 \cdot 1 - 4 \cdot 3\sqrt{3} \cdot 2 + 6 \cdot 3 \cdot 4 - 4 \cdot \sqrt{3} \cdot 8 + 1 \cdot 1 \cdot 16 = \\
 &= 9 - 24\sqrt{3} + 72 - 32\sqrt{3} + 16 = 97 - 56\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

④ Ve tvaru $a + bi$ vyjádřete

$$\begin{aligned} \text{a) } (\sqrt{3} - i\sqrt{3})^6 &= \binom{6}{0}(\sqrt{3})^6(-i\sqrt{3})^0 + \binom{6}{1}(\sqrt{3})^5(-i\sqrt{3})^1 + \binom{6}{2}(\sqrt{3})^4(-i\sqrt{3})^2 + \\ &+ \binom{6}{3}(\sqrt{3})^3(-i\sqrt{3})^3 + \binom{6}{4}(\sqrt{3})^2(-i\sqrt{3})^4 + \binom{6}{5}(\sqrt{3})^1(-i\sqrt{3})^5 + \binom{6}{6}(\sqrt{3})^0(-i\sqrt{3})^6 = \\ &= [27 - 162i - 405 + 540i + 405 - 162i - 27] = -324i + 540i = 216i \end{aligned}$$

Pomocné výpočty – výhodné u složitějších příkladů (výpočty začít od nejmenších mocnin)				Součin v řádku
$\binom{6}{0} = 1$	$(\sqrt{3})^6 = 27$	$(-i)^0 = 1$	$(\sqrt{3})^0 = 1$	27
$\binom{6}{1} = 6$	$(\sqrt{3})^5 = 9\sqrt{3}$	$(-i)^1 = -i$	$(\sqrt{3})^1 = \sqrt{3}$	$-54 \cdot 3 \cdot i = -162i$
$\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$	$(\sqrt{3})^4 = 9$	$(-i)^2 = i^2 = -1$	$(\sqrt{3})^2 = 3$	$-135 \cdot 3 = -405$
$\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$	$(\sqrt{3})^3 = 3\sqrt{3}$	$(-i)^3 = -i^3 = -i(-1) = i$	$(\sqrt{3})^3 = 3\sqrt{3}$	$20 \cdot 9 \cdot 3 \cdot i = 540i$
$\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = 15$	$(\sqrt{3})^2 = 3$	$(-i)^4 = i^4 = 1$	$(\sqrt{3})^4 = 9$	$45 \cdot 9 = 405$
$\binom{6}{5} = \binom{6}{1} = 6$	$(\sqrt{3})^1 = \sqrt{3}$	$(-i)^5 = -i$	$(\sqrt{3})^5 = 9\sqrt{3}$	$-54 \cdot 3 \cdot i = -162i$
$\binom{6}{6} = \binom{6}{0} = 1$	$(\sqrt{3})^0 = 1$	$(-i)^6 = i^6 = -1$	$(\sqrt{3})^6 = 27$	-27

$$\begin{aligned} \text{b) } (\sqrt{3} - i)^5 &= \binom{5}{0}(\sqrt{3})^5(-i)^0 + \binom{5}{1}(\sqrt{3})^4(-i)^1 + \binom{5}{2}(\sqrt{3})^3(-i)^2 + \binom{5}{3}(\sqrt{3})^2(-i)^3 + \\ &+ \binom{5}{4}(\sqrt{3})^1(-i)^4 + \binom{5}{5}(\sqrt{3})^0(-i)^5 = [9\sqrt{3} - 45i - 30\sqrt{3} + 30i + 5\sqrt{3} - i] = -16\sqrt{3} - 16i \end{aligned}$$

Pomocné výpočty			Součin v řádku
$\binom{5}{0} = 1$	$(\sqrt{3})^5 = 9\sqrt{3}$	$(-i)^0 = 1$	$9\sqrt{3}$
$\binom{5}{1} = 5$	$(\sqrt{3})^4 = 9$	$(-i)^1 = -i$	-45i
$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$	$(\sqrt{3})^3 = 3\sqrt{3}$	$(-i)^2 = -1$	$-30\sqrt{3}$
$\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$	$(\sqrt{3})^2 = 3$	$(-i)^3 = +i$	+30i
$\binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5$	$(\sqrt{3})^1 = \sqrt{3}$	$(-i)^4 = 1$	+5\sqrt{3}
$\binom{5}{5} = \binom{5}{0} = 1$	$(\sqrt{3})^0 = 1$	$(-i)^5 = -i$	-i